

GYÖKÖS EGYENLETEK

ELMÉLET

Ha két valós szám egyenlő, akkor a négyzetük is egyenlő: $A = B \Rightarrow A^2 = B^2$.

Ezért ha egy szám megoldása az egyenletnek, akkor megoldása annak az egyenletnek is, melyet úgy kapunk, hogy az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük.

Visszafelé azonban nem teljesül ez az állítás. Ha két szám négyzete egyenlő, akkor lehet, hogy a számok különbözők voltak: nevezetesen egymás ellentettjei.

$$A^2 = B^2 \Rightarrow A = B \text{ vagy } A = -B.$$

Ezért a négyzetre emelés általában nem ekvivalens átalakítás. A négyzetre emelés után kapott egyenletnek több megoldása lehet, mint az eredeti egyenletnek. Kaphatunk **hamis gyököket**, azaz olyan értéket, amely eleme ugyan az értelmezési tartománynak, de az eredeti egyenletnek nem megoldása.

Ezért a négyzetre emelés után nagyon fontos az ellenőrzés.

Négyzetgyökös egyenletek megoldása:

Határozzuk meg az értelmezési tartományt!

Négyzetgyökjel alatt nem állhat negatív szám.

Oldjuk meg az egyenletet!

Négyzetre emelés előtt, ha lehet, rendezzük úgy, hogy a gyökös tag önmagában álljon!

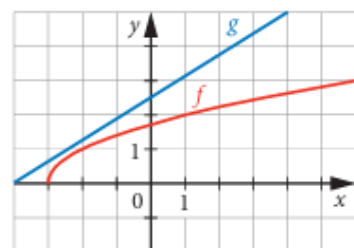
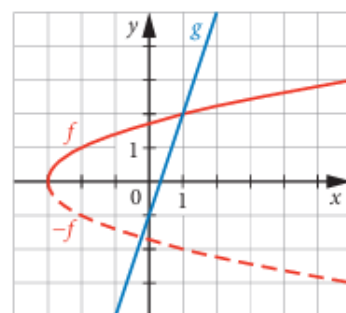
Ellenőrizzünk!

Vigyázat! Kaphatunk hamis gyököket!
Helyettesítsünk be az eredeti egyenletbe!

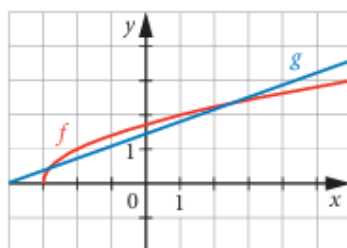
ELMÉLET

Hol rejt el a grafikon az algebrai megoldás során keletkező hamis gyököket?

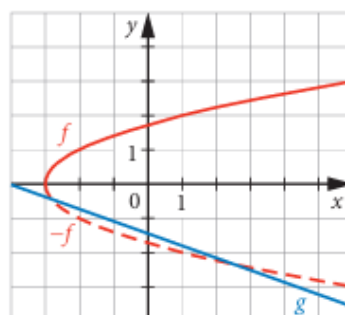
A négyzetre emelés után nemcsak azokat a gyököket keressük, amelyek esetén a függvényértékek egyenlők, hanem azokat is, amelyek esetén a függvényértékek egymás ellentettjei, hiszen ezek négyzete is egyenlő. Tehát nemcsak azokat a helyeket, ahol a g függvény grafikonja metszi az f függvény grafikonját, hanem azokat a helyeket is, ahol a g függvény grafikonja metszi a $-f$ függvény grafikonját. Az ábrán látható, hogy ez még egy metszéspontot jelent. Ennek a pontnak az első koordinátája felel meg az algebrai levezetésben kapható hamis gyöknek.



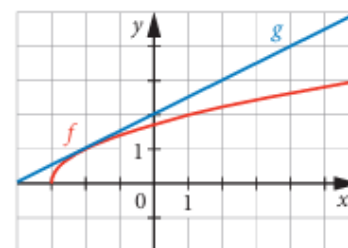
nincs gyök



két gyök van,
nincs hamis gyök

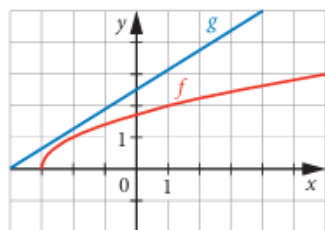


két hamis gyök

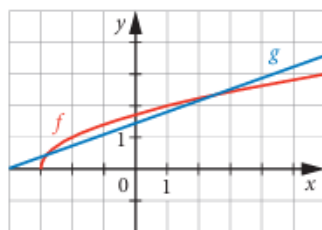


egy gyök van,
nincs hamis gyök

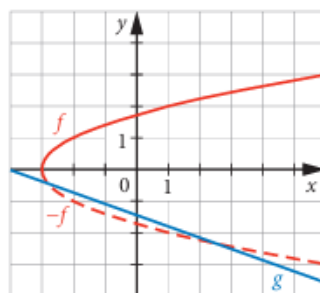
A grafikus út azt is megmutatja, hogy sokféle helyzet előállhat. Lehet 0; 1 vagy 2 megoldás, és ezek között a hamis gyökök száma is lehet 0; 1 vagy 2.



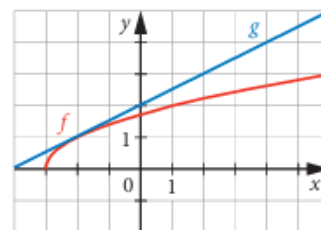
nincs gyök



két gyök van,
nincs hamis gyök



két hamis gyök



egy gyök van,
nincs hamis gyök

FELADATOK

- 1.** Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x+3} + 1 = 3x$$

Megoldás

1. Először határozzuk meg az értelmezési tartományt.
A négyzetgyökjel alatt nem állhat negatív szám, ezért
 $x + 3 \geq 0$, vagyis $x \geq -3$.

2. Ha négyzetre emeljük a $\sqrt{x+3} + 1$ kifejezést, akkor a
nevezetes azonosság alapján ezt kapjuk:

$$(\sqrt{x+3} + 1)^2 = (x+3) + 2 \cdot \sqrt{x+3} + 1.$$

Ebben a kifejezésben ugyanúgy található négyzetgyökös tag, mint az eredetiben. Ezért négyzetre emelés előtt rendezzük át az egyenletet: $\sqrt{x+3} = 3x - 1$.

3. Ha két szám egyenlő, akkor a négyzetük is egyenlő.
Ezért ha egy szám megoldása az egyenletnek, akkor
megoldása annak az egyenletnek is, melyet úgy ka-
punk, hogy mindkét oldalt négyzetre emeljük.

$$(\sqrt{x+3})^2 = (3x-1)^2$$

Végezzük el a négyzetre emelést, és rendezzük az
egyenletet!

$$x+3 = 9x^2 - 6x + 1$$

$$0 = 9x^2 - 7x - 2$$

A megoldóképlet alapján az egyenlet gyökei: $x_1 = 1$
és $x_2 = -\frac{2}{9}$.

4. Mindkét gyök eleme az értelmezési tartománynak, hi-
szen nagyobbak, mint -3 . Ellenőrizzük a megoldásokat
az eredeti egyenletbe való behelyettesítéssel!

$$x_1 = 1 \quad \sqrt{1+3} + 1 = 3 \cdot 1$$

$$x_2 = -\frac{2}{9} \quad \sqrt{-\frac{2}{9}+3} + 1 \neq 3 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$$

Az ellenőrzésből kiderült, hogy csak az egyik megoldás
helyes: egyetlen megoldás van, az $x = 1$.

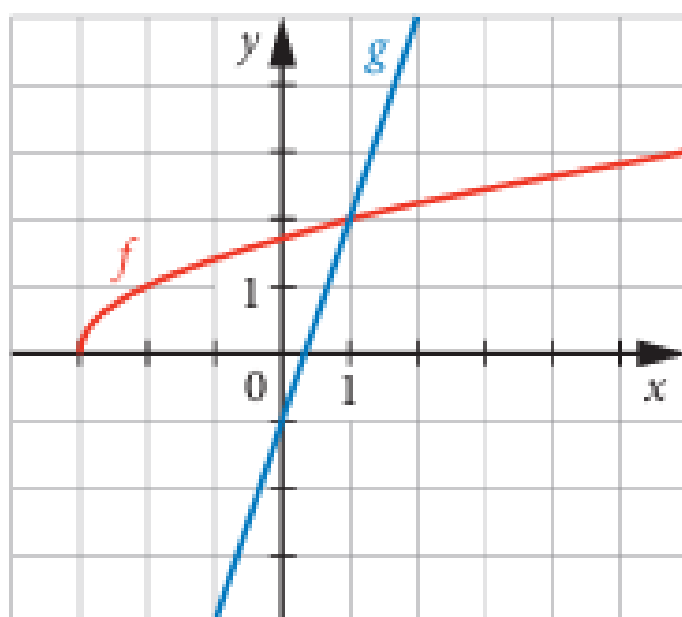
2. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán, grafikus úton! $\sqrt{x+3} = 3x-1$

Megoldás

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $f(x) = \sqrt{x+3}$ és a $g(x) = 3x-1$ függvényeket! Az f függvény értelmezési tartománya $[-3; \infty[$, a g függvény értelmezési tartománya $\mathbf{R}$.

Az f függvény grafikonját úgy kapjuk, hogy az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény grafikonját eltoljuk az x tengellyel párhuzamosan balra (negatív irányban) 3 egységgel.

Az ábráról leolvasható, hogy egyetlen metszéspont létezik, s ennek első koordinátája $x = 1$. Mivel a leolvasás lehet pontatlan, fontos behelyettesítéssel ellenőriznünk. $x = 1$ esetén $\sqrt{4} = 3 - 1$ teljesül, ezért egy megoldás van: $x = 1$.



1. Oldd meg a $\sqrt{x+3} + 9 = 2x$ egyenletet a valós számok halmazán!

- a) Állapítsd meg az egyenlet értelmezési tartományát!
- b) Rendezd át az egyenletet úgy, hogy ha négyzetre emeled az egyenlet két oldalán álló kifejezést, akkor ne maradjon benne négyzetgyökök!
- c) Végezd el a négyzetre emelést!
- d) Oldd meg a keletkező másodfokú egyenletet! Benne vannak-e a kapott gyökök az egyenlet értelmezési tartományában?
- e) A másodfokú egyenlet gyökei közül melyik gyöke az eredeti egyenletnek, és melyik nem?

Megoldás:

1) $\sqrt{x+3} + 9 = 2x$
a) Értelmezési tartomány (kikötés)
Gyök alatt kifejezés ≥ 0
 $x+3 \geq 0 \quad /-3$
 $(x \geq -3)$
 $\Rightarrow$ Értelmezési tartomány: $x \geq -3$

Valamint mivel a bal oldal > 0
 $\Rightarrow$ jobb oldal is > 0
 $\Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$

b) $\sqrt{x+3} + 9 = 2x \quad /-9$
 $\sqrt{x+3} = 2x - 9 \quad /^2$

c) $(\sqrt{x+3})^2 = (2x-9)^2$
 $x+3 = 4x^2 - 4x + 81$
 $x = 4x^2 - 4x + 78 \quad /-x$
 $0 = 4x^2 - 5x + 78$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(2x-9)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 9 + 9^2$
 $= 4x^2 - 4x + 81$

e) Ellenőrzés:
 $x_1 = 6$: $\sqrt{x+3}+9 = 2 \cdot x$

Tehát az
 egyenletnek
 egyetlen Mo-sa
 van: $x = 6$

$$\sqrt{6+3}+9 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 6$$

$$\sqrt{9}+9 \stackrel{?}{=} 12$$

$$3+9=12$$

$$12=12 \checkmark$$

$x_2 = 3,25$: $\sqrt{x+3}+9 = 2 \cdot x$

$$\sqrt{3,25+3}+9 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 3,25$$

$$\sqrt{6,25}+9 \stackrel{?}{=} 6,5$$

$$2,5+9=6,5$$

$$11,5 \neq 6,5 \quad \nRightarrow x_2 \text{ nem Mo.}$$

2 Ebben a feladatban egy-egy négyzetgyökös egyenlet megoldásának részleteit láthatod. Először állapítsd meg az egyenlet értelmezési tartományát! Utána figyeld meg a megoldás és egyenletrendezés során felírt egyenleteket! Döntsd el minden egyenletről, hogy ekvivalens-e a valós számok halmazán a fölötte lévő egyenlettel!

a) $\sqrt{x+14} + x = 16$

$$\sqrt{x+14} = 16 - x$$

$$x+14 = (16-x)^2$$

$$x^2 - 33x + 242 = 0$$

b) $x = \sqrt{3x-2} + 4$

$$x-4 = \sqrt{3x-2}$$

$$(x-4)^2 = 3x-2$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

Megoldás:

a) feladat

Értelmezési tartomány:

$$x+14 \geq 0 \Rightarrow x \geq -14$$

1. lépés:

$$\sqrt{x+14} + x = 16 \rightarrow \sqrt{x+14} = 16 - x$$

Ekvivalens?

Igen. Mindkét oldalból kivontunk x -et. Ez egy megengedett mérlegelv-művelet.

2. lépés:

$$\sqrt{x+14} = 16 - x \rightarrow x+14 = (16-x)^2$$

Ekvivalens?

Nem. A négyzetre emelés nem ekvivalens átalakítás. Behozhat olyan megoldást, ahol $16-x$ eredetileg negatív volt (mivel a négyzetre emelés eltünteti az előjelet).

3. lépés:

$$x+14 = (16-x)^2 \rightarrow x^2 - 33x + 242 = 0$$

Ekvivalens?

Igen. Ez csak a kifejezések kibontása és nullára rendezése.

b) feladat

Értelmezési tartomány:

$$3x-2 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

1. lépés:

$$x = \sqrt{3x-2} + 4 \rightarrow x-4 = \sqrt{3x-2}$$

Ekvivalens?

Igen. Mindkét oldalból kivontunk 4-et. Ez egy megengedett mérlegelv-művelet.

2. lépés:

$$x-4 = \sqrt{3x-2} \rightarrow (x-4)^2 = 3x-2$$

Ekvivalens?

Nem. A négyzetre emelés nem ekvivalens átalakítás. Behozhat olyan megoldást, ahol az eredeti egyenletben $x-4$ negatív lett volna, a négyzetre emelt alakban már pozitívként viselkedne (mivel a négyzetre emelés eltünteti az előjelet).

3. lépés:

$$(x-4)^2 = 3x-2 \rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0$$

Ekvivalens?

Igen. Ez csak a kifejezések kibontása és nullára rendezése; algebrai átalakítás.

3 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{3-2x} - x = 6$

b) $\sqrt{x+3} + 2x = 4$

c) $x - \sqrt{2x} = 4$

Megoldás:

a)

$$\sqrt{3-2x} - x = 6$$

1. Rendezés és négyzetre emelés:

$$\sqrt{3-2x} = x + 6$$

$$3 - 2x = (x + 6)^2$$

$$3 - 2x = x^2 + 12x + 36$$

2. Másodfokú egyenlet:

$$x^2 + 14x + 33 = 0$$

A gyökök a megoldóképlettel: $x_1 = -3, x_2 = -11$.

3. Ellenőrzés:

$$\text{Ha } x = -3: \sqrt{3-2(-3)} - (-3) = \sqrt{9} + 3 = 3 + 3 = 6 \text{ (Igen, ez megoldás).}$$

$$\text{Ha } x = -11: \sqrt{3-2(-11)} - (-11) = \sqrt{25} + 11 = 5 + 11 = 16 \neq 6 \text{ (Ez}$$

hamis gyök).

Tehát a megoldás: $x = -3$

b)

$$\sqrt{x+3} + 2x = 4$$

1. Rendezés és négyzetre emelés:

$$\sqrt{x+3} = 4 - 2x$$

$$x + 3 = (4 - 2x)^2$$

$$x + 3 = 16 - 16x + 4x^2$$

2. Másodfokú egyenlet:

$$4x^2 - 17x + 13 = 0$$

A gyökök a megoldóképlettel: $x_1 = 1, x_2 = 3,25$.

3. Ellenőrzés:

$$\text{Ha } x = 1: \sqrt{1+3} + 2(1) = 2 + 2 = 4 \text{ (Igen, ez megoldás).}$$

$$\text{Ha } x = 3,25: \sqrt{3,25+3} + 2(3,25) = 2,5 + 6,5 = 9 \neq 4 \text{ (Ez hamis gyök).}$$

Tehát a megoldás: $x = 1$

c)

$$x - \sqrt{2x} = 4$$

1. Rendezés és négyzetre emelés:

$$x - 4 = \sqrt{2x}$$

$$(x - 4)^2 = 2x$$

$$x^2 - 8x + 16 = 2x$$

2. Másodfokú egyenlet:

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

A gyökök a megoldóképlettel: $x_1 = 8, x_2 = 2$.

3. Ellenőrzés:

Ha $x = 8$: $8 - \sqrt{2 \cdot 8} = 8 - 4 = 4$ (Igen, ez **megoldás**).

Ha $x = 2$: $2 - \sqrt{2 \cdot 2} = 2 - 2 = 0 \neq 4$ (Ez **hamis gyök**).

Tehát a megoldás: **$x = 8$**

4. 📡 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1}$

b) $\sqrt{2x+4} + \sqrt{4-x} = 0$

Megoldás:

a)

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1}$$

Mivel mindkét oldalon egy-egy négyzetgyök áll, a két oldal akkor egyenlő, ha a gyök alatti kifejezések is megegyeznek (feltéve, hogy értelmezhetőek).

1. Kikötések = Értelmezési tartomány

$$x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

$$2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0,5$$

Közös tartomány: $x \geq 0,5$

2. Megoldás:

Emeljük négyzetre mindkét oldalt:

$$x+3 = 2x-1$$

Rendezzük az egyenletet (vonjunk ki x-et és adjunk hozzá 1-et):

$$4 = x$$

3. Ellenőrzés:

A 4 benne van az értelmezési tartományban ($4 \geq 0,5$).

Behelyettesítve:

$$\sqrt{4+3} = \sqrt{7} \text{ és } \sqrt{2 \cdot 4 - 1} = \sqrt{7}.$$

Tehát a megoldás $x = 4$.

b)

$$\sqrt{2x+4} + \sqrt{4-x} = 0$$

Ez egy nagyon érdekes egyenlet. Itt a számolás helyett érdemes a négyzetgyök tulajdonságaiból kiindulni:

- **Tény:** A négyzetgyök értéke a valós számok körében soha nem negatív (≥ 0)
- **Logika:** Két nemnegatív szám összege csak akkor lehet 0, ha mindkét szám külön-külön is 0.

Vizsgálat:

- Az első tag akkor nulla, ha
$$2x+4 = 0 \Rightarrow x = -2.$$
- A második tag akkor nulla, ha
$$4-x = 0 \Rightarrow x = 4.$$

Következtetés:

Nincs olyan x érték, amely egyszerre tenné nullává mindkét kifejezést.

Ha $x = -2$, akkor az egyenlet így nézne ki:

$$0 + \sqrt{6} \neq 0.$$

Ha $x = 4$, akkor:

$$\sqrt{12} + 0 \neq 0.$$

Bármilyen más szám esetén pedig két pozitív szám összege pozitív lesz.

Megoldás: Nincs megoldása a valós számok halmazán.